APPLICAT° LINÉAIRES

1 Applications linéaires

1 *Application linéaire, base, noyau, bijectivité, ...*

Pour toutes les applications suivantes

1. Déterminer si elles sont linéaires
2. Si f_s avec $s \in [\![1;8]\!]$ est linéaire
   - ➢ Déterminer une base de son noyau
   - ➢ Déterminer une base de son image
   - ➢ Déterminer si les bases sont bijective ou non

a. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f_1(x) := x_1 - x_2 + 3x_3$

b. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f_2(x) := 2x_1 + x_2 + 5$

c. $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f_3(x) := x_1^2 + x_2^2$

d. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f_4(x) := x_1 + x_2 - x_3$

e. $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ f_5(x) := (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2)$

f. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f_6(x) := (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 4x_2 - 2x_3)$

g. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f_7(x) :=$
$(3x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 + 3x_3)$

h. $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f_8(x) :=$
$(x_1^2 - x_2, x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 + 3x_2)$

2 Manipulation des applications lin.

2 *Noyau, image*

Soit (u_1, u_2, u_3) une base de $\mathbb{K}^3$
On définit l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ par :

$$f(u_1) = u_1 + 2u_2 + u_3$$
$$f(u_2) = u_1 + u_2 - u_3$$
$$f(u_3) = u_2 + u_3$$

Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (x_1 - x_2, -3x_1 + 3x_2)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad g(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

On note $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ et $M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(g)$.

4 Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ deux applications linéaires définies par :

$$f(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3), \forall x \in \mathbb{R}^3$$
$$g(x) = (3x_1 - x_2, 3x_2 - x_1, x_1) \forall x \in \mathbb{R}^2$$

On note $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer la matrice $A = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}(f)$, puis $B = M_{\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2}(g)$
2. En déduire $Im(f), Im(g)$
3. Déterminer $h = g \circ f$, puis sa matrice $M_{\mathcal{B}_3}(h)$
4. Calculer BA, que remarque t-on ?

5 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (2x_1 + x_2, 3x_1 - 2x_2)$$

On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_1 = ((3,2),(2,2))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}_1$.
2. Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$. En déduire à nouveau la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.

6 Soient ε, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, où :

$$f_1 = (1,1,1), \quad f_2 = (1,1,0) \quad \text{et} \quad f_3 = (1,0,0)$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(f)$, où $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (2x_1 + x_3, x_1 - 4x_2, 3x_1)$$

7 On pose

$$F := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \text{ et } x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$$

et on définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$\forall x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (0, x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2 - x_3)$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est une application linéaire. À quoi correspond l'ensemble F pour f ?
3. Déterminer une base de $\ker(f)$. f est-elle bijective ?
4. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$ où
$$u_1 := (-2, 1, 1), \quad u_2 := (0, 1, 1), \quad u_3 := (0, 0, 1).$$
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant la formule de changement de base.

8 On pose

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 + x_2 = 0\}$$

et on définit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$\forall x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x) = (x_1 + x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_3)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que g est une application linéaire. À quoi correspond l'ensemble E pour g ?
3. Déterminer une base de $\ker(g)$. g est-elle injective ?
4. Donner la matrice M de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ où
$$v_1 := (1, -2, 1), \quad v_2 := (0, 1, 1), \quad v_3 := (1, 0, 0).$$
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer la matrice N de g dans la base $\mathcal{C}$ en utilisant la formule de changement de base.

9 On pose

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - 2x_2 = 0\}$$

et on définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$\forall x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est une application linéaire. À quoi correspond l'ensemble E pour f ?
3. Déterminer une base de $\ker(f)$. f est-elle injective ?
4. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ où
$$v_1 := (2, 1, -3), \quad v_2 := (0, 1, -1), \quad v_3 := (0, 0, 1).$$
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer la matrice N de f dans la base $\mathcal{C}$ en utilisant la formule de changement de base.

10 On pose

$$F := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 = 0\}$$

et on définit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$\forall x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que g est une application linéaire. À quoi correspond l'ensemble F pour g ?
3. Déterminer une base de $\ker(g)$. g est-elle injective ?
4. Donner la matrice P de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Soit $\mathcal{D} := (w_1, w_2, w_3)$ où
$$w_1 := (1, 0, \frac{1}{3}), \quad w_2 := (0, -1, 1), \quad w_3 := (0, 0, 1).$$
Montrer que $\mathcal{D}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Calculer la matrice Q de g dans la base $\mathcal{D}$ en utilisant la formule de changement de base.