Exos CALCULS MATRICIELS

1 Définitions et opérations

Somme et produit par un scalaire

1 *Opérations matricielles*

1. Rappeler à quelles conditions il est possible de calculer la somme des deux matrices.
$M_1 \in \mathcal{M}_{l_1 c_1}(\mathbb{K})$ et $M_1 \in \mathcal{M}_{l_2 c_2}(\mathbb{K})$.
Où $l_1, l_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}^*$.
2. Donner l'expression de $M_1 + M_2$ et de $3M_1 - 4M_2$.
3. On considère trois matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. Comment appelle t-on les matrices A, B et C ?
   b. Calculer $A + C$
   c. Calculer $(A + B) + C$ et $B + (A + C)$. Que peut-on dire sur la somme matricielle ?
4. Donner un exemple de matrice triangulaire supérieure.
5. Expliquer ce qu'est une **matrice identité** et donner I_5.

Identités remarquables

2 *Identités remarquables ?*

1. Soient

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$. Que peut-on en déduire ?
   b. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2. Que peut-on en déduire ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
   a. Que peut-on dire de A et B ?
   b. Montrer que

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

2 Matrices particulières

Produit matriciel

3 On considère les 6 matrices suivantes,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 1 \\ 1-i & 3 & 2+2i \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler dans quel cas le produit matriciel est-il possible.
2. Déterminer la **transposée** et l'**adjointe** de chacune des matrices ci dessus.
3. Déterminer et calculer tous les produits matriciels possibles pour les matrices ci-dessus, puis les calculer

Puissance d'une matrice

4 Soit la matrice suivante,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3 et A^4.

Polynômes et matrices

5 Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(A) = 0$
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

6 Soit la matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $P'(X) = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P'(A') = 0$.
2. En déduire que A' est inversible et déterminer A'^{-1}.

7 Polynôme annulateur et inverse

Soit la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et le polynôme $R(X) = X^3 - 9X^2 + 27X - 27 \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $R(C) = 0$.
2. Montrer que le polynôme minimal de C est $(X-3)^3$. *(2 méthodes...)*
3. En déduire que C est inversible et exprimer C^{-1} en fonction de C.

8 Contre-exemple matriciel

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(ab)^2 = a^2b^2$.
2. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices AB, BA, $(AB)^2$ et A^2B^2.

3. La propriété $(AB)^2 = A^2B^2$ est-elle toujours vraie pour des matrices carrées ?

Systèmes et matrices inverses

9 *Résoudre des systèmes*

1. Montrer que les deux matrices

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

sont inverses l'une de l'autre.

2. En déduire les solutions des deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ -2x_1 - x_2 & = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 & = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 & = 1 \end{cases}$$

10 *Résolution de systèmes*

1. Montrer que les deux matrices

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sont inverses l'une de l'autre.

2. En déduire les solutions des deux systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = -1. \end{cases}$$

3 Inverse d'une matrice carrée

11 *Déterminants de base*

1. Rappeler la formule du déterminant pour une matrice de taille 2×2.

2 Calculer le déterminant des matrices carrée d'ordre 2 suivantes, lesquelles sont inversibles ?

a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

h $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

i $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

j $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

12 *Déterminant plus dur*

Soient les matrices suivantes :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Déterminer le déterminant de chaque matrice.

2 Lorsque c'est possible, déterminer l'inverse de cette matrice.

Systèmes et matrices

13 On considère le système suivant :

$$(S) = \begin{cases} 3x + y + z & = 1 \\ x + 3y + 2z & = 5 \\ -x + 2y - 4z & = 0 \end{cases}$$

1 Écrire (S)sous la forme $\mathcal{A}X = \mathcal{B}$

2 Montrer que $\mathcal{A}$ est inversible, puis calculer $\mathcal{A}^{-1}$

3 En déduire les solutions de (S)

14 On considère le système suivant :

$$= (S) \begin{cases} 2x + 3y + z & = 4 \\ 4x + y + 2z & = 6 \\ -x + 5y - 3z & = -2 \end{cases}$$

1 Écrire (S) sous la forme $\mathcal{A}X = \mathcal{B}$

2 Montrer que $\mathcal{A}$ est inversible, puis calculer $\mathcal{A}^{-1}$

3 En déduire les solutions de (S)

15 Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) = \begin{cases} 3x + 2y + z & = 1 \\ x + 3y + 2z & = 0 \\ 2x + y + 3z & = 1 \end{cases}$$

$$(S_2) = \begin{cases} x + 3y - z & = 1 \\ 2x + 6y - 3z & = -6 \\ x - y + 2z & = 5 \end{cases}$$