POLYNÔMES FORMELS

1 Les polynômes formels

Analogie avec les suites

1 Une suite définie par un polynôme

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n^2 - 2n + 1$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Définir rigoureusement le terme **degré**. Quel est le degré du polynôme ?
3. Démontrer par récurrence que $u_n = 3n^2 - 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Indéterminée et évaluation

Soit le polynôme $P(X) = 3X^2 - 5X + 2$.

1. Donner le degré de P, son coefficient dominant et son terme constant.
2. Calculer $P(1),\ P(-1)$ et $P(2)$.
3. Vérifier que $P(X) = (3X - 2)(X - 1)$ en développant.

3 Suites et polynômes

On considère les suites suivantes :

- $u_n = (1, 2, 4, 8, 0, 0, \ldots)$
- $v_n = (0, 0, 0, 0, \ldots)$
- $s_n = (4, 8, 6, 4, 7, 2, 2, 0, \ldots)$
- $t_n = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

1. Déterminer le point commun de chaque suite.
2. Donner la définition d'un polynômes.
3. En déduire les polynômes dérière les suites.
4. Donner le degré de chaque polynôme.

Rappels

Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit X^k de la façon suivante :

- Si $k = 0$, X^k est le polynôme constant donné par $X = (1, 0, 0, 0, \ldots) = 1$.
- Si $k = 1$, X^k est le polynôme $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, pù le polynôme est appelé **indéterminé** X.
- Si $k \geq 2$, X^k est le polynôme $X^k = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $a_k = 1$ et que $\forall n \neq k$, $a_n = 0$.

L'indéterminée X

4 Déterminer X^6, X^2, $4X^3 + 2X^8$.

5 Soient $P = 4X^8 + (4 + i)X^5 + X^4 + 4X^3 + 7$ et $Q = (7, 0, 0, 4, 1, 4 + i, 0, 0, 4)$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Expliquer pourquoi $P = Q$.

Polynômes et propriétés

6 Polynômes, calculs, degré, propriétés

Soit les polynômes suivants :

$$P(X) = 3X^3 - 5X^2 + 2X - 7,$$
$$Q(X) = X^5 + 4X - 6,$$
$$R(X) = 2X^2 - X + 3.$$

1. Calculer $P + Q$, $4Q - 8P$ et $2PQ$, puis donner leur degré.
2. Déterminer les propriétés du degré d'opérations de polynôme
3. Avec les polynômes suivants, déterminer leur degré SANS calculer des polynômes $P + 2Q$, $P - PQR$, $(2P + 4Q)(RQ)$.

$$P_2(X) = 4X^7 + 2X^6 - 2X^2 + 4X + 9,$$
$$Q_2(X) = 5X^6 3X^4 + X^3 6X + 7,$$
$$R_2(X) = -2X^5 + 4X^3 + X^2 - 3X + 8.$$

4. Déterminer les propriétés d'addition, de multiplication d'un scalaire & de multiplication des polynômes.

7 Binôme x Polynômes

Calculer le polynôme suivant :

$$P = (X - 3)^4 + (X - 5)^2$$

8 Sommes x Polynômes x Systèmes linéaires

Soit $S(n) = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1 On suppose qu'il existe un polynôme P de degré 4 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n) = S(n)$.

- a Calculer $P(0), P(1), P(2), P(3), P(4)$.
- b Écrire $S(n)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et déduire un système de 5 équations dont les inconnues sont les coefficients de P.
- c Résoudre ce système pour déterminer les coefficients du polynôme P.

2 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = S(n)$.

3 Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles de P.

4 En déduire $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

9 *Polynômes & Sommes*

On cherche s'il existe un polynôme Q de degré 3 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

1 Montrer que $2X^2 + 3X + 1 = 2(X+1)(X+\frac{1}{2})$.

2 On suppose qu'il existe un polynôme Q de degré 3 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

- a Calculer $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$, et $Q(3)$.
- b En déduire un système de 4 équations dont les inconnues sont les coefficients de Q.
- c Résoudre le système pour déterminer l'expression de Q, puis en déduire Q.

3 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Q(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

En conclure que $Q(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

10

Soient $P(X) = 2X^3 + 3X^2 - 5X + 4$ et $Q(X) = X^2 - X + 1$.
Effectuer la division euclidienne de P par Q.

11

Effectuer les divisions euclidienne des polynômes suivants.

1
- a $P_1(X) = 3X^3 - 5X + 4$ par $Q_1(X) = X - 1$
- b $P_2(X) = 2X^4 + X^2 - 7X + 2$ par $Q_2(X) = X^2 + 1$

2
- a $P_1(X) = 2X^4 - 3X^3 + X^2 - X + 5$ par $Q_1(X) = X^2 - X + 2$
- b $P_2(X) = 5X^5 - 2X^4 + 3X^2 - X + 4$ par $Q_2(X) = X^3 - X + 1$

12

Les polynômes suivants sont ils divisibles ?

1 $A(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$ et $B = X - 2$

2 $A(X) = X^4 + X^2 - 2$ et $B = X^2 + 2$

13

Décomposer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ ci-dessous en facteurs irréductibles pour $\mathbb{K} := \mathbb{R}$, puis pour $\mathbb{K} := \mathbb{C}$.

1 $2X^3 - 3X^2 - 5X + 6$

2 $X^4 - 1$

3 $X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$

4 $X^3 - 27$

5 $X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$

6 $X^4 - 5X^2 + 4$

7 $X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

8 $X^3 + 3X^2 - 4X - 12$

9 $X^4 - 2X^3 + X^2 - 2X + 1$