E xos CALCULS DE SOMMES

1 Récurrence et symbole $\sum$

Raisonnement par récurrence

1 Démontrer l'égalité grâce au principe de récurrence.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Soit $n \geq 1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$
Démontrer que pour tous $n \geq 1$, on a

$$S_n = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} 1$

1. Calculer S_1, S_2, T_1 et T_2. En déduire à priori, les formules donnant S_n et T_n.
2. Montrer par récurrence les résultats conjecturés.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Déterminer l'expression de $\sum_{k=p}^{q} a$

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer S_1, S_2, T_1 et T_2. En déduire à priori, les formules donnant S_n et T_n.
2. Montrer par récurrence les résultats conjecturés.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Déterminer l'expression de $\sum_{k=p}^{q} k$.

5 Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $q \in \mathbb{K}^*$.
Le but de cet exercice est de calculer la somme géométrique de raison q données par :

$$S_n = \sum_{k=p}^{n} q^k$$

1. Pour $k = 1$, calculer directement S_n.
Dans la suite, on suppose que $q \neq 1$
2. Déterminer intuitivement $S_n - qS_n$ et, en déduire, à priori la valeur de S_n.
3. Montrer par récurrence sur n la formule obtenue.

Symbole $\sum$ et calculs

6 Calculs de sommes

1. Écrire à l'aide du signe $\sum$ les expressions suivantes :
   - a $S_1 := 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{12}$
   - b $S_2 := \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{10}{1024}$
   - c $S_3 := a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^n}{n}$
   - d $S_4 := 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 50$
   - e $S_5 := -2 + 4 - 6 + 8 + \cdots - 50$
   - f $S_6 := 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$, où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
Écrire avec des pointillés les expressions suivantes :
   - a $S_n := \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{1+i}$
   - b $T_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{1+k}$
   - c $U_n := \sum_{k=0}^{2n+1} k - \sum_{k=0}^{n} 2k$

7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes ci-dessous.

1. $S_1 := \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$
2. $S_2 := \sum_{k=0}^{n} 2^k\, 5^{n-k}$
3. $S_3 := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} + 2k\right)$
4. $S_4 := \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k k$
5. $S_5 := \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{3k-2}}$
6. $S_6 := \sum_{k=1}^{n} \frac{2 + 4^n 4^k}{2^k}$

2 Somme télescopique et binôme

Somme télescopique

8 *Application directe*

1. En effectuant le changement d'indice, calculer en fonction de n les sommes suivantes.
2. **[Bonus]** Démontrer vos résultats par récurrence.

a. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

b. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} (ln(k+2) - ln(k))$

c. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k+1}{k} \right)$

d. $S_4 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$

Binôme de Newton

9 Établir le triangle de Pascal pour $n \in [0; 10]$.

10 *Formule du binôme de Newton*

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. Calculer $(2a+b)^4$.
3. Calculer $(X+2)^5$.
4. Pour les plus fous, $(3X+4)^8$.

Retour sur les sommes

11 Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$ et $q \in \mathbb{R}^*$, $q \neq 1$.
Le but de cet exercice est de calculer la somme géométrique de raison q donnée par

$$S_n := \sum_{k=p}^{n} q^k$$

en utilisant cette fois un changement d'indice.

1. En utilisant un changement d'indice, calculer

$$T_n := S_n - qS_n$$

2. En déduire la valeur de S_n.

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme des n premiers carrés :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} k^2$$

1. Simplifier l'expression suivante :

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$$

2. Développer $(k+1)^3$ et en déduire une nouvelle expression de T_n en fonction de S_n.
3. Déduire des deux questions précédentes la valeur de S_n.

13 Soient $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$ et $r \in \mathbb{R}^*$, $r \neq 1$.
On considère la somme géométrique suivante :

$$U_n := \sum_{k=m}^{n} r^{n-k}$$

1. Effectuer un changement d'indice pour écrire U_n sous la forme d'une somme classique de type r^i.
2. En déduire la valeur de U_n sous forme simplifiée.

14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Le but est de calculer la somme des n premiers entiers impairs :

$$I_n := \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

1. Montrer que $I_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1$.
2. En utilisant les formules classiques des sommes, calculer I_n.
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de I_n en fonction de n ?

15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
On considère la somme définie par :

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a+k} - \frac{1}{a+k+1} \right)$$

1. Montrer que la somme S_n est télescopique.
2. En déduire une expression simplifiée de S_n.