Exos

ESPACE VECTORIEL $\mathbb{K}^n$

1 L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Les n-uplets

1 *Notion de n-uplet*

1. Donne la définition d'un n-uplet. Quelle est la différence entre un 2-uplet et un ensemble de deux éléments ?
2. Parmi les objets suivants, lesquels sont des n-uplets ? Précise la valeur de n :
   - a $(5,3)(5,3)$
   - b $\{2,4\}\ \{2,4\}$
   - c $(a,b,c)(a,b,c)$
   - d $((1,2),3)((1,2),3)$
   - e $[7][7]$
3. Soit $u = (1,2,3,4)$. Donne la 3 composante de u. Peut-on changer l'ordre des composantes ?
4. Peut-on avoir deux n-uplets égaux avec les mêmes éléments dans un ordre différent ? Explique.
5. Définir rigoureusement l'égalité de deux n-uplets.
6. Soit $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si tous les x_i sont des entiers naturels, que représente un tel n-uplet géométriquement ?

Opérations sur les vecteurs

2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'expression de $x + y$.
2. Dans quel cas ne peut-on pas faire la somme / différence de deux vecteurs ?
3. Déterminer l'expression de λx.
4. Quelles la valeur de $0_{\mathbb{R}^n}$?

3 Effectuer les opérations suivantes sur les vecteurs.
Soient $u = (5,8,9,4)$, $v = (4,8,12,0)$, $w = (7,8,9)$, $x = (7,52,8,1)$ et $y = (1,0,2,2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- a $u + v$
- b $2u + 4y - 6v$
- c $3w$
- d $-8u - y + 5x - 9v$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

4 Introduction aux sous-espaces vectoriels
On pose

$$F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

1. Montrer que $0_{\mathbb{R}^2} \in F$.
2. Soient $x = (x_1, x_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda x \in F$.
3. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $x + y \in F$.
4. Comment appelle t-on les étapes des questions 2 et 3 ?
5. Que peut-on dire de F ?

Combinaisons linéaires

Rappels

Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs dans un espace vectoriel (par exemple $\mathbb{R}^2$).
On dit que $\vec{v}$ est une **combinaison linéaire** de ces vecteurs s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

5 *Combinaisons linéaires*

1. Soient $\vec{u} = (12)$, $\vec{v} = (31)$, et $\vec{w} = (53)$. Montrer que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Vérifie ta solution par le calcul vectoriel.
3. Soit $\vec{z} = (2,7)$. Est-il une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$? Justifie en résolvant le système associé.
4. Que peut-on dire d'un vecteur qui n'est **pas** une combinaison linéaire des autres ?

6 Stabilité et neutre
On pose :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \text{ et } x_2 - x_3 = 0$$

1. Montrer que F est stable par l'addition et le produit par un scalaire.
2. Montrer que l'élément neutre appartient à F.
3. Que peut-on dire de F ?

2 Combinaisons linéaires & SEV

7 Déterminer la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

8 Démonter que F_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ avec $i \in [\![1;8]\!]$ puis déterminer la notation $Vect$.

1. $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0$ et $2x_1 + x_3 = 0$
2. $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ et $x_2 - x_3 = 0$
3. $F_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + 3x_2 = 0\}$
4. $F_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
5. $F_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}$
6. $F_6 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2iz_2 - z_3 = 0\}$
7. $F_7 = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid v_1 - 2v_2 + 3v_3 - 4v_4 = 0\}$
8. $F_8 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 8x_4 & = 0 \end{cases} \right\}$