Exos NOMBRES COMPLEXES

1 Calculs avec les complexes

1 Résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Que peut-on dire ?

2 *Propriétés mathématiques*

1. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 = 29 + 4i$ et $z_2 = \frac{58}{2} + 4i$. Que peut-on dire de z_1 et z_2 ?
2. *Sans utiliser le cours*, **Rappeler <u>à voix haute</u> la propriété** d'égalité de deux nombres complexes. Écrire cette dernière avec les notations mathématiques.
3. *Sans utiliser le cours*, **Rappeler <u>à voix haute</u> la propriété** d'addition de deux nombres complexes, puis l'écrire avec les notations mathématiques.

3 *Somme et produit de complexes*

1. Réaliser les sommes sur les complexes suivants.
   - a. $z_1 = 4i + 5,\ z_2 = 4 + 4i,$ Calculer $z_1 + z_2$
   - b. $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -5 + 7i,\ z_3 = 64i\ z_4 = 32i,$ Calculer $z_1 + z_2 - z_3 + z_4$
   - c. $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = -3 + 4i,\ z_3 = 5 - 6i,$ $z_4 = -7 - 8i$ Calculer $-2z_1 + z_2 - z_3 + 4iz_4$, puis $2iz_1 + z_3$
2. Réaliser les produits sur les complexes suivants.
   - a. $z_1 = 3 + 2i,\ z_2 = 1 + 4i$ Calculer $z_1 \times z_2$.
   - b. $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 2 - i$ Calculer $z_1 \times z_2$.
   - c. $z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 + 2i,\ z_3 = 1 - 3i$ Calculer $z_1 \times z_2 \times z_3$.
   - d. $z_1 = 4 + i,\ z_2 = 3 - 2i$ Calculer le carré de $z_1 \times z_2$.
3. Reconstituer avec les notations mathématiques, la propriété du produit de deux nombres complexes z_1, z_2.
   <u>**Indication :**</u> En vous aidant bien sûr de la question 2. mais aussi d'exemples simples.

4 Calculer le module puis le conjugué de chacun des complexes suivant.

1. $z_1 = 9 + 8i$
2. $z_2 = -3 - 22i$
3. $z_3 = 3 + 4i$
4. $z_4 = -1 + 2i$
5. $z_5 = 5 - 3i$
6. $z_6 = -2 - 6i$
7. $z_7 = 7 + i$
8. $z_8 = 5 - 9i$

5 Propriétés du module, du conjugué

1. Montrer la propriété suivante :
$$(|z| = 0) \Longleftrightarrow (z = 0)$$
2. Prouver que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. Prouver aussi que $\overline{\overline{z}} = z$
4. Soit $z = 3 + 4i$, calculer $\dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ que peut-on en déduire. Puis montrer que cette propriétés est vraie en générale.
5. Montrer la propriété suivante :
$$(z \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow (z = \overline{z})$$
6. Démontrer que les égalités suivantes sont vraies :
   - a. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   - b. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

6 Déterminer la forme algébrique des complexes suivants.

Simplifier une fraction complexe.

1. $z_1 = \dfrac{1}{1 + i}$
2. $z_2 = \dfrac{2 + i}{1 - i}$
3. $z_3 = \dfrac{3 + 2i}{2 + 3i}$
4. $z_4 = \dfrac{1 - i}{2 + i}$
5. $z_5 = \dfrac{4 + 3i}{3 - 4i}$
6. $z_6 = \dfrac{5 + 2i}{1 + i}$

2 Forme géométrique des complexes

7 Et si on commençait par un peu de cours, représentation d'un complexe et arguments d'un nombre complexe.

Argument d'un complexe

8 *Pour partir sur de bonnes bases*

1. Dans un plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, déterminer les coordonnées du point M_z aussi appelé image de z puis le placer dans le repère.
   - **a** $z = 3 + 4i$
   - **b** $z = -2 + 5i$
   - **c** $z = 1 - 3i$
   - **d** $z = -4 - 2i$
   - **e** $z = 6i$
   - **f** $z = -7$
2. Calculer l'argument des nombres complexes suivants.
   - **a** $z = 1 + i$
   - **b** $z = -1 + \sqrt{3}i$
   - **c** $z = -2 - 2i$
   - **d** $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
   - **e** $z = -3$
   - **f** $z = 2i$
3. ***Démontrer une propriété***
   Soit $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 - i$. Montrez que l'argument du produit $z_1 \times z_2$ est égal à la somme des arguments de z_1 et de z_2 .

9 *Forme trigonométrique*

Soit le complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Représenter z dans le plan complexe.
2. Déterminer le module et un argument de z.
3. Écrire z sous **forme trigonométrique**.

Forme exponentielle d'un complexe

10 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants **(sans oublier la rédaction)**.

1. $z_1 = -i$
2. $z_2 = 3$
3. $z_3 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
4. $z_4 = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$
5. $z_5 = \dfrac{-1 + i}{1 + i}$
6. $z_6 = \dfrac{3 - i}{3 + i}$

11 **Problème de rigueur**

Soient deux nombres complexes z_1, z_2 donnés sous leur forme exponentielle telle que :

- $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$
- $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$

Pourquoi la propriété suivante est dites « maladroite » ?

$$(z_1 = z_2) \iff (|z_1| = |z_2| \text{ et } \theta_1 = \theta_2)$$

12 A l'aide de vos connaissances, des propriétés et des rappels que nous effectuons de manière régulière. Démontrer les propriétés suivantes

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
3. - **a** $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$
   - **b** $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$
4. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
5. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
6. $e^{(i\theta)^2} = e^{i2\theta}$

13 *Formule de Moivre*

1. Développer l'expression $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$.
2. Écrire la formule de Moivre pour $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$.
3. Identifier les parties réelles et imaginaires des deux expressions obtenues et déterminer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin$.

14 *Formules d'Euler*

1. Linéariser $\cos^2\theta$, *rappeler ce que signifie le terme « linéariser »*.
2. Linéariser $\sin^3\theta$.

15 Déterminer une forme exponentielle et une forme algébrique des complexes suivants.

$$z_1 = \frac{32}{(\sqrt{3} + i)^9} \qquad z_2 = \frac{64}{(1 + \sqrt{3}i)^6}$$

3 Résolution d'équation du 2^{nd} degré

16 *Équations du second degré à coefficients réels*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2+4=0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2-2x+5=0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $3x^2+2x+1=0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (selon les cas) les équations suivantes :
   a. $x^2-6x+9=0$
   b. $x^2+x+1=0$
   c. $x^2+2x=-5$
5. Soit $x^2+bx+c=0$ une équation du second degré.
   a. Donner la formule générale des racines dans l'ensemble $\mathbb{C}$.
   b. Que peut-on dire des racines si le discriminant est strictement négatif ?
   c. Donner les racines de x^2+2x+2 et représenter-les dans le plan complexe.

17

Résoudre l'équation $z^2=\sqrt{3}+i$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

18

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+3z+4=0$,
2. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$,
3. $z^2-2iz+2(1+2i)=0$,
4. $iz^2-4iz-2+4i=0$,
5. $z^4=1$,
6. $z^4-\sqrt{2}z^2+1=0$.

19 Résoudre les équations suivantes

1. $z^2+(2-i)z+(3+4i)=0$
2. $z^2-4iz+5=0$
3. $z^2+(1+i)z+i=0$
4. $z^2-(2+3i)z+(1-i)=0$
5. $z^2+2z+(1+2i)=0$
6. $z^2-(1-i)z+i=0$
7. $z^2+z+2i=0$
8. $z^2-(3+i)z+4=0$

Exercices supplémentaires

20 *Généralisation de la méthode trigonométrique*

Soit $\Delta=re^{i\theta}$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

1. **Preuve de la méthode** :
   Considérons $\delta=r'e^{i\theta'}$, avec $r'\in\mathbb{R}_+$ et $\theta'\in\mathbb{R}$, tel que $\delta^2=\Delta$.
   a. Montrer que $r'=\sqrt{r}$ et $\theta'=\frac{\theta}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
   b. En déduire que les solutions de $\delta^2=\Delta$ sont $\pm\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$.
2. **Généralisation de la méthode** :
   Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

   Le nombre $\delta\in\mathbb{C}$ est dit *racine n-ième* de Δ si $\delta^n=\Delta$.

   Considérons $\delta=r'e^{i\theta'}$, avec $r'\in\mathbb{R}$ et $\theta'\in\mathbb{R}$, tel que $\delta^n=\Delta$.
   a. Quelle relation existe-t-il entre r' et r ?
   b. Même question entre θ' et θ ?
   c. En déduire une expression des racines n-ièmes de Δ.
3. **Application** : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\delta^6=i$.