MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE 2

Séance de tutorat — période octobre 2025

Licence Informatique — Université Le Havre Normandie ULHN

1 Les relations binaires

Définitions et généralités

....

On considère A et B deux ensembles.
On appelle .... sur A et B une partie $\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{R}$ .... Soit $(a,b) \in A \times B$ alors ont dit qu'ils sont en relation lorsque ...... $\in$ ....
Lorsque $A = B$ alors $\mathcal{R}$ est une ....

Remarque

- On appelle **ensemble** une **collection d'éléments <u>distincts</u> et non-ordonnés**.
- Lorsque l'on note $(a_1, a_2) \in A \times A'$ cela signifie en fait que $a_1 \in A$ et $a_2 \in A'$.
  Cas particulier : Si a_1 et a_2 appartiennent tous les deux à A on peut le noter de deux manières,

$$a_1, a_2 \in A \iff (a_1, a_2) \in A \times A \iff (a_1, a_2) \in A^2$$

Propriété

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

On considère une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E quelconque.
Alors $\mathcal{R}$ est dite :

- $\Rightarrow$ **Réflexive** si et seulement si : ....
- $\Rightarrow$ **Symétrique** si et seulement si : ....
- $\Rightarrow$ **Antisymétrique** si et seulement si : ....
- $\Rightarrow$ **Transitive** si et seulement si : ....

TD

Relation d'équivalence

Relation d'équivalence

On considère une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E non-vide.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si et seulement si $\mathcal{R}$ est :

⇒ .... ⇒ .... ⇒ ....

Soit $x, y \in E$,
On appelle .... de x l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation avec x.
Elle est notée $C(x)$ ou $\dot{x}$ ou même $\overline{x}$. *On utilisera les deux premières notations.*
Ainsi, l' .... est appelé **ensemble quotient** et il est noté $E/\mathcal{R}$.

Remarque

Soit E un ensemble quelconque.
L'entier noté $|E|$ est appelé .... de E.

1 Les relations d'équivalences
On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$a\mathcal{R}b \iff n \text{ divise } b - a.$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. En utilisant la division euclidienne, montrer qu'il y a exactement n classes d'équivalences distinctes.

2 On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
2. Décrire les classes d'équivalences du couple (a, b).
3. On désigne par $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient pour cette relation.
   Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2/\mathcal{R} &\to [0; +\infty[\\ (a, b) &\mapsto a^2 + b^2 \end{aligned}$$

   est bien définie et que c'est une bijection.

Remarque

Soit $f : E \to F$ une application.
Alors on dit que f est :

⇒ **Surjective** si et seulement si : ....

⇒ **Injective** si et seulement si : ....

⇒ **Bijective** si et seulement si : ....

TD

Propriété

Classes d'équivalences

On considère une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble A non-vide.
Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $\Rightarrow$ $\forall x \in A$, on a $C(x) \neq \emptyset$
- $\Rightarrow$ $\forall x, y \in A$ avec $C(x) \neq C(y)$, on a $C(x) \cap C(y) = \emptyset$
  Deux classes d'équivalences différentes ....
- $\Rightarrow$ $\bigcup_{x \in A} C(x) = A$
  L'union de toute les classes d'équivalences donne l'ensemble A.

Ainsi, l'ensemble de toutes les classes d'équivalences distinctes de $\mathcal{R}$ forme une .... de A.

Remarque

Soit A un ensemble non vide, I u intervalle et $(P_i)_{i\in I}$ une famille de partie de A.
Alors on dit que $(P_i)_{i\in I}$ est une .... de A si et seulement si :

$\Rightarrow$ $\forall i \in I, \quad P_i \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\forall i, j \in I, \quad i \neq j, \quad P_i \cap P_j = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} P_i = A$

Relation d'ordre

Relation d'ordre

On considère une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E non-vide.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** si et seulement si $\mathcal{R}$ est :

$\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ ....

Une relation d'ordre est généralement notée $\leq$.
Lorsqu'au moins tous les éléments de E sont en relation avec un autre, on parle alors d'**ordre total**, sinon d'**ordre partiel**.

$$\mathcal{R} \text{ est d'ordre total} \iff \forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$$

On note $(E, \mathcal{R})$ l'ensemble ordonné.
Ainsi, si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, on parlera d'**ensemble totalement ordonné**.

3 On considère la relation $<<$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par :

$$m << n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n = km$$

1 Montrer que $<<$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
On considère par la suite que $\mathbb{N}^*$ *est ordonné par la relation* $<<$.

2 Soit $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$? Déterminer si ils existent les éléments appelés maximal, minimal, minimum, maximum, minorant, majorant, supremum, infimum.

Minimum et maximum

On considère un ensemble ordonné $O = (A, \leq)$ fini et $B \subseteq A$ un sous-ensemble de O.

- $\Rightarrow$ $b \in B$ est **minimum de B** si $\forall b' \in B, \quad b \leq b'$ *Le plus petit élément dans l'ensemble.* $min(B)$
- $\Rightarrow$ $b \in B$ est **maximum de B** si $\forall b' \in B, \quad b \geq b'$ *Le plus grand élément dans l'ensemble.* $max(B)$

Minimal et maximal

On considère un ensemble ordonné $O = (A, \leq)$ fini et $B \subseteq A$ un sous-ensemble de O.

$\Rightarrow$ $b \in B$ est **minimal de B** si $\forall b' \in B, \quad b \leq b' \Rightarrow b = b'$

$\Rightarrow$ $b \in B$ est **maximal de B** si $\forall b' \in B, \quad b \geq b' \Rightarrow b = b'$

Ce sont les plus petits éléments au sens de la relation d'ordre noté $\leq$.

Le relation $\leq$ ne représente pas nécessairement « inférieur ou égal », c'est simplement la notation pour représenter une relation d'ordre.

Propriété

Minimum v/s minimal

Si $b \in min(B)$
Alors $\forall b' \in B$, alors on a $b \leq b'$. b est le plus petit élément de B au sens de la relation $\leq$.
Dans le diagramme de Hasse, le minimum est représenté par une feuille unique.

$b \in B$ minimal
Alors $\forall b' \in B$ on a $b \leq b' \implies b' = b$
Il n'y a aucun élément de B plus petit que lui au sens de $\leq$.
Dans le diagramme de Hasse, toutes les feuilles sont minimales.

Propriété

Maximum v/s maximal

Si $b \in max(B)$
Alors $\forall b' \in B$, on a $b' \leq b$. b est le plus grand élément de B au sens de la relation $\leq$.
Dans le diagramme de Hasse, le maximum est représenté par une racine unique.

$b \in B$ maximal
Alors $\forall b' \in B$ on a $b \leq b' \implies b' = b$.
Il n'y a aucun élément de B plus grand que lui au sens de $\leq$.
Dans le diagramme de Hasse, toutes les racines sont maximales.

Majorant et minorant

On considère un ensemble ordonné $O = (A, \leq)$ fini et $B \subseteq A$ un sous-ensemble de O.

$\Rightarrow$ $\alpha \in \ldots\ldots$ est **minorant de B** si $\forall b \in B, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow$ $\alpha \in \ldots\ldots$ est **majorant de B** si $\forall b \in B, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Les minorants/majorants sont les éléments en relations avec tous les autres éléments de A.

Majorant et minorant n'existent pas nécessairement.
Les ensembles infinis par exemple...

Propriété

Les bornes

On considère un ensemble ordonné $O = (A, \leq)$ fini et $B \subseteq A$ un sous-ensemble de O.

$\Rightarrow$ Le plus petit des majorants est aussi la .... de B notée $\ldots\ldots(B)$.

$\Rightarrow$ Le plus grand des minorants est aussi la .... de B notée $\ldots\ldots(B)$.

Remarque

- Un élément minimum est borne inférieure de B.
- Un élément maximum est une borne supérieure de B.
- Un élément minimal (resp. maximal) n'est pas forcément une borne de B.

Définitions supplémentaires sur les relations d'ordre

Relation inverse

On considère une relation $\mathcal{R}$ d'ordre sur un ensemble A non-vide.
Alors la relation $\mathcal{R}^{-1}$ est définie par :

$$\forall i, j \in A, \quad i\mathcal{R}j \iff j\mathcal{R}^{-1}i$$

est une relation d'ordre sur A.
On l'appelle **relation d'ordre inverse** sur A.

Relation produit

Soit $(A, \mathcal{R})$ et $(B, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnées.
Alors on définie la relation $\mathcal{P}$ sur $A \times B$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in A \times B, \quad (a,b)\mathcal{P}(c,d) \iff a\mathcal{R}c \wedge b\mathcal{S}d$$

est une relation d'ordre partielle sur $A \times B$.
On l'appelle **relation d'ordre produit** sur $A \times B$.

Relation lexicographique

Soit $(A, \mathcal{R})$ et $(B, \mathcal{S})$ deux ensembles ordonnées.
Alors on définie la relation $\mathcal{L}$ sur $A \times B$ par :

$$\forall (a,b),(c,d) \in A \times B, \quad (a,b)\mathcal{L}(c,d) \iff (a \neq c \wedge a\mathcal{R}c) \vee (a = c \wedge b\mathcal{S}d)$$

est une relation d'ordre sur $A \times B$.
On l'appelle **relation d'ordre lexicographique** sur $A \times B$.

Diagramme de Hasse

Prédécesseur et successeur

Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné, et $x, y \in A$ deux éléments tels que $x \leq y$.
On considère qu'il n'existe aucun élément $k \in A$ distinct de x et y tel que $x \leq k \leq y$. *Permet d'éviter toute transitivité de $\leq$ entre x et y.*
Alors :

$\Rightarrow$ x est le **prédécesseur** de y.

$\Rightarrow$ y est le **successeur** de x.

TD

Propriété

Diagramme de Hasse

Tout ensemble ordonné **fini** $(A, \leq)$ peut être représenter à l'aide d'un diagramme de Hasse.
En suivant les règles suivantes :

- ➢ Chaque point du diagramme est un élément de A.
- ➢ La position de chaque points suit la règle suivante :
  - $x, y \in A$ avec $x < y$ au sens de la relation $\leq$. Alors x est placé en dessus de son représentant y.
  - Dans le cas contraire x sera placé au dessus de y.
- ➢ Deux points x, y représentent deux sommets et sont reliés par un segment de x vers y.

4 Soit la relation $\leq$ définie sur $\{1, 2, 3, 4\}$ par :

$$(x, y) \leq (x', y') \iff x \geq x' \wedge y \leq y'$$

1. Prouver que $\leq$ est une relation d'ordre.
2. Dessiner le diagramme de Hasse de $\leq$.
3. Déterminer si $(A, \leq)$ admet des extremas.

5 On définit une relation binaire $\leq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \leq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad y = x^n$$

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Matrice booléenne

On considère une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble A non-vide.
Une relation peut être représentée par une ...., ce qui signifie que les éléments de cette dernières sont réduits à deux possibilités $\{0, 1\}$ ou encore $\{F, V\}$ qui correspondent respectivement à la valeur fausse et la valeur vraie.
On peut utiliser **symbole de Kronecker** qui est une fonction définie par :

$$(\delta)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i\mathcal{R}j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

....

On considère deux relations telle que

$\Rightarrow$ $\mathcal{R} : A \to B$

$\Rightarrow$ $\mathcal{S} : B \to C$

La .... de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ notée $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est définie par :

....

Si la notation $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$ est trop « chiante », au pire utilisez une lettre pour définir la relation composée genre $\mathcal{C}$.
Évidemment, il faut penser à le dire dans votre rédaction.

6

1 Soient A et B deux ensembles finis et $\mathcal{R}$ une relation définie dans $A \times B$.

$$A = \{a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\} \quad B = \{b_j, b_{j+1}, \ldots, b_m\}$$

On rappelle la définition de $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ la matrice booléenne d'ordre (n, m) associée à $\mathcal{R}$.

$$(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a Écrire des algorithmes qui ont, en entrée une matrice booléenne associée à une relation binaire sur un ensemble fini et qui précisent si cette relation est réflexive, symétrique ou transitive.
Soient deux relations R et S de $A \times B$, on rappelle que, $\forall x, y \in A \times B$:

$$x(R+S)y \Longleftrightarrow x(R \cup S)y$$
$$x(RS)y \Longleftrightarrow x(R \cap S)y$$

On définit les deux opérations suivantes sur les matrices booléennes P et Q :

$$P \vee Q : (P \vee Q)_{ij} = P_{ij} \vee Q_{ij}$$
$$P \wedge Q : (P \wedge Q)_{ij} = P_{ij} \wedge Q_{ij}$$

b Montrer que $\mathcal{M}_{R+S} = \mathcal{M}_R \vee \mathcal{M}_S$;

c Montrer que $\mathcal{M}_{RS} = \mathcal{M}_R \wedge \mathcal{M}_S$.

d Donner les algorithmes qui calculent $P \wedge Q$ et $P \vee Q$ avec P et Q comme paramètres.

2 On définit maintenant la composition $R \circ S$ de deux relations $R \subset A \times B$ et $S \subset B \times C$ telle que :

$$\forall (x, y) \in A \times C \quad x(R \circ S) \Longleftrightarrow \exists z \in B \mid xRz \wedge zSy$$

On définit aussi **le produit booléen** $A \otimes B$ de deux matrices booléennes A d'ordre (n, p) et B d'ordre (p, m) par :

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigvee_{k=1}^{p} a_{ik} \wedge b_{kj}$$

a Vérifier que $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

b Montrer que $M_{R \circ S} = M_R \otimes M_S$

c Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et $R \subset A^2$ une relation sur A définie par $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.

i Écrire la matrice booléenne associée à R et construire son graphe.

ii Construire le graphe de R^2, donner sa matrice associée et vérifier que la formule du **b** permet de la retrouver.

d Écrire un algorithme permettant d'effectuer le produit booléen de deux matrices booléenne.

....

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble A non vide.
Il peut arriver qu'une relation n'admette pas une ou plusieurs des propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité. Dans ces cas là, on peut faire en sorte qu'une nouvelle relation $\mathcal{R}^+$ admette ces propriétés en rajoutant le minimum de couple possible.
La nouvelle relation basée sur $\mathcal{R}$ est alors appelée .... de p où $p \in P$ et notée ....
Avec $P = \{$ réflexive, symétrique, transitive $\}$, c'est la relation contenant la propriété p la plus petite au sens de $\mathcal{R}$.

7 *Exercice sur les clôtures*

1. Construire les clôtures réflexives, symétriques et transitives de la relation de l'exercice 6 2 c.
2. Montrer que la clôture réflexive de R est $R + I_A$, où I_A est définie par :

$$\forall x, y \in A, \quad xI_Ay \Longleftrightarrow x = y$$

3. Montrer que la clôture symétrique de R est $R + R^{-1}$ où R^{-1} est définie par :

$$\forall x, y \in A, \quad xR^{-1}y \Longleftrightarrow x = y$$

4. Montrer que la clôture transitive de R est :

$$R^+ = \sum_{k=1}^{|A|} R^k \text{ où } R^k = \underbrace{R \circ R \circ R \circ \ldots \circ R}_{k-fois}$$

où $|A|$ représente le cardinal de A.

5. Écrire les algorithmes de calcul des clôtures réflexives, symétriques et transitives.

Méthode Démontrer la validité d'une clôture

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur un ensemble A non vide et $P = \{$ réflexive, symétrique, transitive $\}$ l'ensemble des clôtures démontrable.
On note p_{rop} l'une des « clôtures propriété » que l'on souhaite démontrer et on la nouvelle relation formée de p_{rop} est notée $\mathcal{R}^+$. Ainsi pour montrer la validité d'une clôture on peut suivre les étapes suivantes :

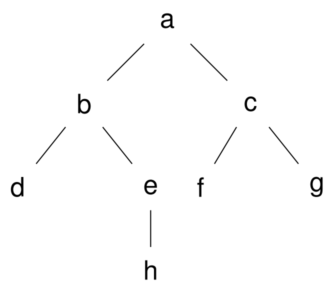
1. ....
....
2. ....
....
3. ....
....

8 *Éléments maximaux, minimaux, majorants, minorants, supremum et infimum*

1 On considère l'ensemble

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

muni d'une relation d'ordre définie par le diagramme de Hasse suivant :



Pour chaque sous-ensemble B de A ci-après, déterminer :

— Les éléments **minimaux** et **maximaux** de B ;
— S'ils existent : le **minimum**, le **maximum**, le **supremum** et l'**infimum** de B dans A ;
— Les **majorants** et **minorants** de B.

a $B = \{d, e, f\}$

b $B = \{b, c, g\}$

c $B = \{e, h\}$

d $B = \{a, b, c, f\}$

e $B = A$

2 Même question pour l'ensemble

$$A = \mathbb{N} \text{ muni de la relation d'ordre } \mid$$

(la divisibilité), et pour les sous-ensembles suivants :

a $B = \{2, 3, 6\}$

b $B = \{4, 8, 12\}$

c $B = \{3, 9, 18, 27\}$

d $B = \{5, 10, 15, 20\}$

e $B = \{2, 4, 8, 16, 32\}$

Relation circulaire

On considère une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble A non-vide.
On dit que $\mathcal{R}$ est **circulaire** si et seulement si :

....

2 Théorie des graphes

Définitions et généralités

Graphe

On appelle **graphe** le triplet $G = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$ où :

- ⇒ …… représente ……………………………………………………………………
- ⇒ …… représente ……………………………………………………………………
- ⇒ …… représente ……………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

……………………………

On considère $s_1, s_2 \in \ldots\ldots$ deux ………… du graphes G et $a = (s_1, s_2) \in \ldots$ une ………………… de G.
Ainsi s_1 et s_2 sont les ………………… de a et ils sont dits ………………… entre eux.

Degré

Soit G un graphe.
Alors on peut associer à chaque sommet $s \in S$ un entier appelé **degré** et noté $deg(s)$ qui représente en fait ……………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………
……………………………………………………………

Remarque

Soit $G = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$ un graphe.

- ➢ Soit $a = (s_1, s_2)$ une arrête, si $s_1 = s_2$ alors dans ce cas on parle de ……………………
- ➢ Deux arrêtes a_1 et a_2 sont dites …………………… si et seulement si elles possèdent les mêmes extrémités.

Graphe simple, Graphe multiple

Soit G un graphe.
On dit que G est un **graphe simple** si il n'admet que des arrêtes simples. Le cas échéant, on parle de **graphe multiple**.
En fait, une arrête est dite simple si ....

....

....

Soit $G = (S, A, \phi)$ un graphe.
On considère l'application ϕ définie par :

$$\phi : A \to \{S' \subseteq S \mid |S'| = 2\}$$
$$a \mapsto < s_1, s_2 >$$

Ainsi, si la cardinalité de l'objet associé à une arrête noté $|S'|$ peut être plus grand que 2 alors on parle ....

Sous-graphe

....
....
....
....
....
....
....
....

TD

Remarque

Soit $G = (S, A, \phi)$ un graphe.
On appelle **sous-graphe induit** le sous-graphe $G' = (S', A')$ tel que :

$$\forall s_1, s_2 \in S', \quad \text{si } < s_1, s_2 >\in A \Rightarrow < s_1, s_2 >\in A'$$

où $< s_1, s_2 >$ représente les objets contenus dans l'ensemble A.
On conserve toutes les arrêtes entre les sommets du sous-graphe.

Isomorphisme de graphe

Soit $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes simple.
Alors, on dit que les graphes G_1 et G_2 sont **isomorphe** si et seulement si il existe une bijection entre eux telle que :

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & S_1 \rightarrow S_2 \\ & s_1, s_2 \mapsto < s_1, s_2 >\in A_1 \iff < \phi(s_1), \phi(s_2) >\in A_2 \end{aligned}$$

Autrement dit :
$\Rightarrow$ ....
....
$\Rightarrow$ ....
....

Graphes particuliers

Les graphes nuls et leurs antipodes, les graphes complets

Graphe nul, graphe complet

Soit $G = (S, A)$ un graphe.

⇒ On dit que G est **nul** si ....
On note :

$$G \text{ nul} \iff \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

⇒ À l'inverse, on dit que G est **complet** si ....
....
Ce genre de graphe est noté ....

.... et ....

Soit $G = (S, A, \phi)$ un graphe.

⇒ On appelle .... une suite de longueur $n \in \mathbb{N}$ notée $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n$ de sommets tels que $\forall k \in [1; n-1]$ le sommet s_k est adjacent au sommet s_{k+1}.

⇒ Tandis qu'un .... est une suite de sommets permettant de relier un sommet $s \in S$ à lui même. Cette suite peut être notée : $(s_1, s_2, \ldots, s_n, s_1) \in S^{n+1}$.

Alors, on peut noter que :
....
....
....
....
....
....
....

Remarque

⇒ Une .... *(resp. un ....)* est dit .... lorsqu'il n'y a pas de répétition d'arêtes.

⇒ Une .... *(resp. un ....)* est dit .... lorsqu'il n'y a pas de répétition de sommets.

Les graphes connexes

Graphe connexe

....
....
....
....
....

Le graphe de gauche n'est pas connexe car ....
....
....

Composante connexe

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
On appelle **composante connexe** tout sous-graphe G' connexe et maximal de G.

Graphe acyclique

Graphe acyclique

....
....
....
....
....

Les arbres et les forêts

Arbres

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
On dit que G est un **arbre** si il est .... et .... c'est à dire :

$\Rightarrow$ ....

$\Rightarrow$ ....

Remarque

Lorsque un graphe G est un arbre, on utilise un vocabulaire différent pour définir les différentes composants de ce dernier.
Soit $\mathcal{A} = (S, A)$ un arbre.

- Les sommets sont appelés ....
- Les sommets $s \in S$ de degré $deg(s) = 1$ sont appelés ....
- Les arrêtes sont appelées ....

Propriété

Les arbres

Soit $\mathcal{A} = (S, A)$ un arbre, alors il admet les propriétés suivantes :

1. ....
2. ....
3. ....
4. On admet que $|A| =$ ....

Forêt

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
On appelle **forêt** un graphe acyclique *pouvant être connexe*. Plus simplement, une forêt représente en fait, un ensemble d'arbres.

Graphes bipartis

Graphe bipartis

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
On dit que G est **bipartis** si ....
....

....

On peut noter le graphe $G = (\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots)$.

D'une manière plus simple, ...
....
....
....
....
....
....

Alors, on peut noter que :
....
....
....
....
....
....
....

Propriété

Graphe bipartis

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
Tout graphe bipartis n'admet aucun cycle simple de longueur impaire ($2k + 1, k \in \mathbb{Z}$).
Ainsi, ...
....

Graphe planaire

Graphe planaire

On considère $G = (S, A, \phi)$ un graphe.
On dit que G est **planaire** si il est isomorphe à un graphe tracé dans $\mathbb{R}^2$ <u>sans croisement d'arêtes</u>.
Autrement dit, ...
....
....

Remarque

Malheureusement, qui dit graphe planaire dit vocabulaire adapté aux graphes planaires.
Soit G un graphe planaire,

- Une **représentation planaire** ....
- Une **région planaire** ou .... du graphe G est ....
- Une face non bornée est appelée **face externe**.
- Une arrête qui délimite deux faces est appelée ....

Alors, on peut noter que : ....

Propriété

FORMULE D'EULER

Soit $G = (S, A, \phi)$ un graphe.
Alors **toute représentation planaire** de G avec f faces, s sommets et a arrêtes admet l'égalité suivante :

....

Arbre couvrant

Arbre couvrant

Soit $G = (S, A, \phi)$ un graphe.

⇒ Un **sous-arbre couvrant** de G est un sous-graphe G' qui conserve tous les sommets de G.
On a alors $G = (S, A, \phi)$ et $G = (S', A', \phi)$ avec $S = S'$.

⇒ On appelle **arbre couvrant** tout sous-arbre couvrant qui est un arbre.

Graphe pondéré

Graphe pondéré

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple.
Soit $p : A \to \mathbb{R}$ une application appelée .... sur les arêtes de G.

$\Rightarrow$ On note $(G, p) = (S, A, p)$ le ....

$\Rightarrow$ $p(a)$ est appelé .... de l'arête $a \in A$.

Alors, on peut noter que :
....
....
....
....
....
....
....

Arbre couvrant de poid minimal

....
....
....
....
....

Remarque

L'algorithme de Prim permet de déterminer l'arbre couvrant de poid minimal à partir d'un graphe simple.

TD

Coloration de graphe

Coloration d'un graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
On appelle **coloration de G** l'application c définie par :

$$c : \ldots\ldots \to \ldots\ldots$$
$$< s_1, s_2 > \mapsto \ldots\ldots \neq \ldots\ldots$$

Autrement dit, ...
....
....
....

⇒ Le graphe G est dit .... avec ...... $\in$ ...... si il existe une coloration telle que $c : \ldots\ldots \to \{1, 2, \ldots, k\}$ est valide.

⇒ Le plus petit nombre que l'on peut utiliser pour colorer un graphe est appelé .... et il est noté $\mathcal{X}(G)$.

⇒ Une **clique** ....
....

⇒ Un **stable** ....
....

Propriété

Coloration

Soit $G = (S, A)$ un graphe,

⇒ Pour un graphe nul, on a $\mathcal{X}(G) = \ldots\ldots$

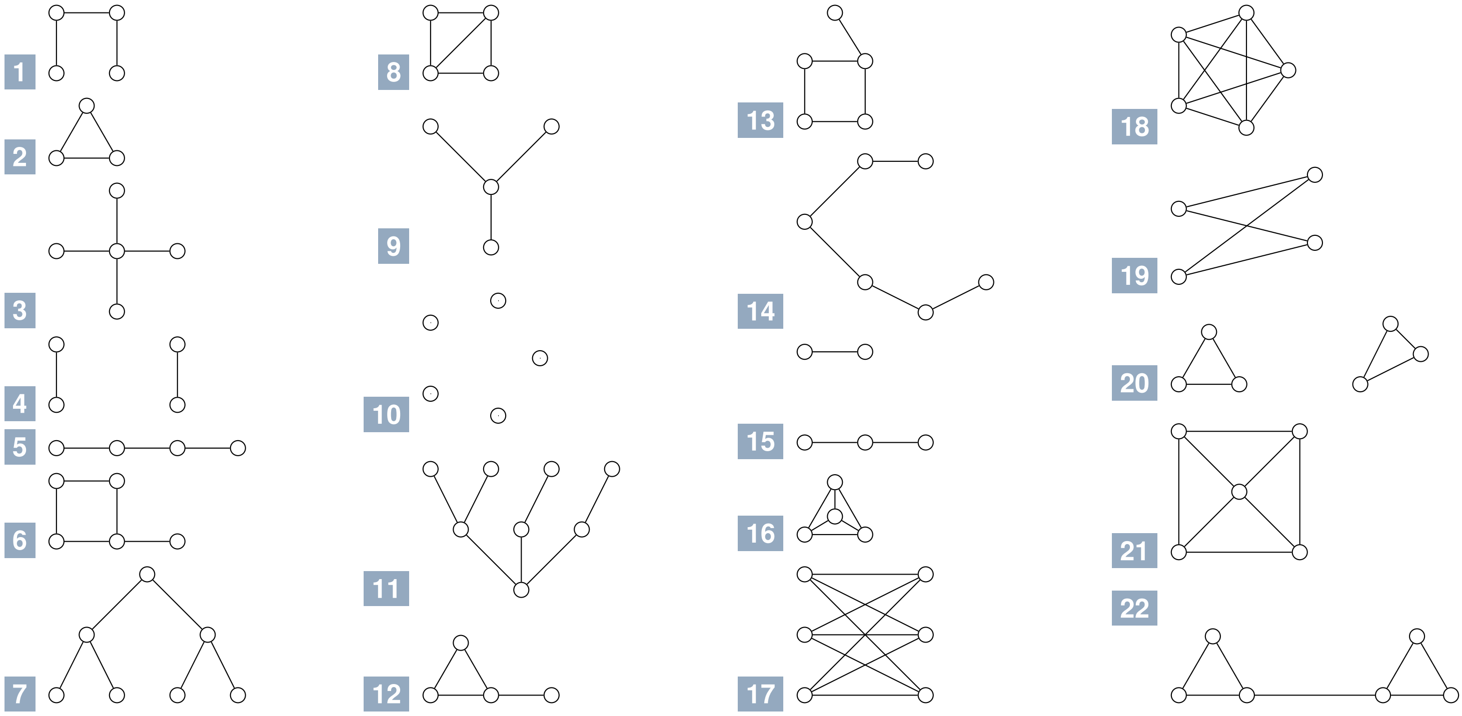
⇒ Pour un graphe k-complet on a $\mathcal{X}(G) = \ldots\ldots$

9 Exercices du TD2

1. Construire le diagramme de Hasse correspondant à $(D_{135}, |)$.
2. Que peut on dire de ce graphe ?
3. Déterminer le degré de chaque sommet. Puis calculer la somme des degrés.
4. Énumérer les cycles de longueur $n = \{4, 6, 8\}$.
5. Ce graphe est-il un arbre ?
   - a. Si oui : Quel est son degré maximal.
   - b. Si non : construire un arbre couvrant.

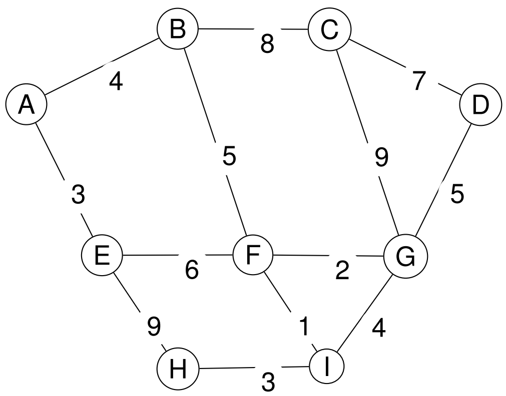
10 Propriétés des graphes

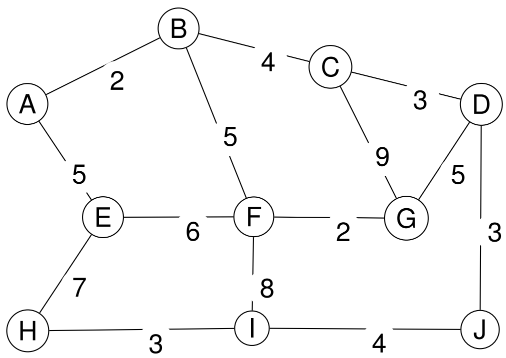
Déterminer les propriétés des graphes suivants :



11 Tracer les graphes complets pour $k \in [2, 6]$

12 En utilisant l'algorithme de Prim, puis de Kruskal, déterminer l'arbre couvrvant de poid minimal





13 Coloration

Reprendre l'intégralité des graphes de l'exercice 10 pour les colorer, on précisera à chaque fois les stables, les cliques et le nombre chromatique.